Princípio de Relatividade e Invariância da Velocidade da Luz

Na homenagem ao Professor Doutor António Ribeiro Gomes como sinal e prova de profunda consideração e estima pelo homem, professor e cientista

Manuel José de Abreu Faro
Universidade Técnica de Lisboa

1. Introdução

Admitamos que S_0 é um referencial de inércia.

Qualquer outro referencial, S, que, relativamente a S_0, exiba um movimento de translação uniforme, desprovido de torção, é também um referencial de inércia.

Então, em S_0 e S os fenómenos naturais acontecem de modo idêntico segundo as mesmas leis gerais.

Este o Princípio de Relatividade no sentido restrito, numa tradução livre de um enunciado de Einstein [1], [2].

Sendo assim, recorrendo a experiências locais escapa-nos o previlégio de uma identificação própria no espaço e no tempo.

Perdem-se os conceitos de espaço absoluto e tempo absoluto como também se perde um sentido de movimento absoluto apenas se evidenciando e aferindo aquele que relativamente a um dado referencial se tome e observe.

Junta-se ao Princípio de Relatividade o Princípio da Invariância da Velocidade da Luz:

Num referencial de inércia, a luz, mais concretamente uma perturbação electromagnética, propaga-se no vácuo com uma velocidade constante "c" qualquer que seja a sua proveniência.

Bastam-nos estes dois princípios (confirmados pela experiência) para estabelecer a lei de transformação de coordenadas entre referenciais de inércia, generalizadamente designada por Transformação de Lorentz.

Pela exacta significação que Einstein confere a essa transformação, à plena equivalência, sem previlégio, de S e S_0, melhor se designaria por Transformação de Lorentz-Einstein, e é o que fazemos.

No presente trabalho analisa-se o que sucessivamente resulta da ordem pela qual se toma e recorre a cada um dos princípios enunciados.

2. Invariância da velocidade da Luz. Princípio de Relatividade.

Para o que se segue basta-nos uma variedade espacial a uma dimensão e assim designemos por (X,T) as coodenadas do espaço e do tempo de S_0 e por (x,t) as coordenadas de S.

As origens das coordenadas espaciais, O_0 e O, coincidem na origem dos tempos $T = t = 0$.

O eixo dos $\overline{xx}$ deslisa com velocidade uniforme, v_r, relativamente ao eixo dos $\overline{XX}$, $\boldsymbol{v}_{O/O_o} = v_r \boldsymbol{e}_x$

Comecemos por confrontar a Transformação de Galileu

$$x = X - v_r T \tag{1a}$$
$$t = T \tag{1b}$$

com o Princípio da Invariância da Velocidade da Luz.

Nas origens $x = X = 0$ observa-se em $T = t = 0$ a frente de onda de um mesmo raio luminoso e mais tarde em (X,T) e (x,t).

Do princípio enunciado resulta:

$$X = cT \quad \text{e} \quad x = ct \tag{2}$$

em que "c" representa a velocidade da luz no vácuo.

Mas existindo movimento relativo, teremos $X \neq x$ e, consequentemente, $T \neq t$ pelo que a equação (1b) não é respeitada e assim se abandona retendo, no entanto, (1a) onde se introduz (2).

Obtem-se

$$T = \frac{v_r}{c} T + t$$

o que se pode escrever

$$T = \frac{v_r}{c^2} X + t \tag{3}$$

Em princípio, esta relação não é geral uma vez que *T*, *X*, *x* e *t* estão relacionados por (2) mas, heuristicamente, admitamos que sim e tiremos consequências.

Fundamentalmente, aceitar (3), significa substituír a Transformação de Galileu pelo par de equações

$$x = X - v_r T \tag{4a}$$
$$t = T - \frac{v_r}{c^2} X \tag{4b}$$

Tomando acréscimos obtem-se facilmente

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\dfrac{dX}{dT}-v_r}{1-\dfrac{v_r}{c^2}\dfrac{dX}{dT}} \quad \text{e} \quad \frac{dX}{dT}=\frac{\dfrac{dx}{dt}+v_r}{1+\dfrac{v_r}{c^2}\dfrac{dx}{dt}} \tag{5}$$

que são exactamente as leis relativistas de transformação de velocidades v [S] $\leftrightarrow V$ [S_o].

Como seria de esperar, pela imposição feita,

$$\frac{dX}{dT}=c \leftrightarrow \frac{dx}{dt}=c \tag{6}$$

Assim resulta de (5).

As equações (4a,b) revelam-nos dois factos importantes:

- Observa-se a invariância da velocidade da luz.
- O tempo deixa de ser absoluto, $T \neq t$, e dá lugar a um espaço-tempo em que os acontecimentos, e onde ocorrem, se transformam de acordo com (4a,b), em relações da forma:

$$(X,T) \leftrightarrow (x,t) \tag{7}$$

Esgotadas as potencialidades do Princípio da Invariância da Velocidade da Luz, examinemos o Princípio de Relatividade.

É um consequente desse princípio que S_0 afira em S como S afere em S_0 e assim dever-se-á verificar

$$\left(\frac{x}{X}\right)_{T=0}=\left(\frac{X}{x}\right)_{t=0} \tag{8a}$$

$$\left(\frac{t}{T}\right)_{X=0}=\left(\frac{T}{t}\right)_{x=0} \tag{8b}$$

Deveria ser assim mas o que, de facto, ressalta das equações (4a,b) é:

$$\left(\frac{x}{X}\right)_{T=0}=1 \neq \left(\frac{X}{x}\right)_{t=0}=\frac{1}{\sqrt{1-v_r^2/c^2}} \tag{9a}$$

$$\left(\frac{t}{T}\right)_{X=0}=1 \neq \left(\frac{T}{t}\right)_{x=0}=\frac{1}{\sqrt{1-v_r^2/c^2}} \tag{9b}$$

Dada a uniformidade de comportamento relativamente ao espaço e ao tempo uma só correcção a partir de um coeficiente α corrigirá o desvio ao Princípio de Relatividade.

Escrevamos, então, em vez de (4a,b)

$$X = v_r T + \alpha\, x \tag{10a}$$

$$T = \frac{v_r}{c^2} X + \alpha\, t \tag{10b}$$

Impondo as condições (8a) e (8b) imediatamente se obtem

$$\alpha = \sqrt{1 - v_r^{\,2}/c^2} \tag{10c}$$

As equações (10a,b) revestem, então, a forma

$$X = v_r T + \sqrt{1 - v_r^{\,2}/c^2}\;\; x \tag{11a}$$

$$T = \frac{v_r}{c^2} X + \sqrt{1 - v_r^{\,2}/c^2}\;\; t \tag{11b}$$

que é exactamente a Transformação de Lorentz-Einstein numa forma que nos é grato escrever e em que se evidencia, na primeira, a velocidade relativa v_r e, na segunda, a dessincronização relativa v_r / c^2.

Conclui-se, assim, que a simples imposição da invariância da velocidade da luz nos conduz a uma transformação correcta das velocidades observadas para movimentos (naturais ou construídos) em S_0 e S.

No entanto, não se revela a contracção do espaço e a dilatação do tempo que no modo como encaminhámos a dedução se filiam, emergem, do Princípio de Relatividade.

3. Princípio de Relatividade. Invariância da Velocidade da Luz.

Facilmente se demonstra que, para o movimento relativo que temos vindo a considerar, a transformação de coordenadas se pode escrever [4]

$$X = v_r T + b\ x \tag{12a}$$

$$x = -v_r t + d\ X \tag{12b}$$

o que parcialmente já contempla o Princípio de Relatividade no que respeita a $\boldsymbol{v}_{O/O_o} = v_r \boldsymbol{e}_x$ e $\boldsymbol{v}_{O_o/O} = -v_r \boldsymbol{e}_x$.

Impondo

$$\left(\frac{x}{X}\right)_{T=0} = \left(\frac{X}{x}\right)_{t=0} \quad \text{e} \quad \left(\frac{t}{T}\right)_{X=0} = \left(\frac{T}{t}\right)_{x=0} \tag{13}$$

resulta de qualquer dessas relações

$$b = d \tag{14}$$

que faremos iguais a $1/\gamma$ a fim de utilizar, mais tarde, notação convencional.

As equações (12a,b) revestem então a forma

$$X = v_r T + x/\gamma \tag{15a}$$

$$x = -v_r t + X/\gamma \tag{15b}$$

Admitamos em S_0 o movimento de um ponto descrito pela equação

$$X = VT \tag{16a}$$

Em S esse movimento será descrito por uma equação da forma

$$x = vt \tag{16b}$$

Substituindo (16a,b) em (15a,b) obtem-se

$$\gamma^2 = \frac{Vv}{(V - v_r)(v + v_r)} \tag{17}$$

e a transformação de coordenadas assume a forma geral

$$X = \gamma\,[x + v_r t] \tag{18a}$$

$$T = \gamma\,[t + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 v_r} x] \tag{18b}$$

satisfazendo integralmente o Princípio de Relatividade e nada impondo sobre a lei de transformação de velocidades.

Admitamos que existe uma velocidade V que se transforma em v e reciprocamente, qualquer que seja a velocidade v_r: $v \leftrightarrow V$, independente de v_r.

Se assim fôr, e pelo Princípio de Relatividade, o γ será o mesmo quando se trocar v_r por $-v_r$ e então teremos de (17)

$$(V - v_r)(v + v_r) = (V + v_r)(v - v_r)$$

o que acarreta

$$V = v$$

Isto significa que se tal se der então $V = v$ e $v = V$.

A partir de aqui resta-nos a experiência.

Escolhamos a experiência de Fizeau (1851) em que

$$v = c/n \qquad V = c/n + \left(1 - 1/n^2\right)v_r \tag{18}$$

Sem qualquer aproximação obtem-se

$$\frac{1}{\gamma^2} = \frac{1+(1-1/n^2)n\beta - \beta^2}{1+(1-1/n^2)n\beta} \qquad \beta = \frac{v_r}{c} \tag{19}$$

o que para

$$(1-1/n^2)n\beta << 1$$

nos conduz a

$$1/\gamma^2 \cong 1-\beta^2, \qquad n \neq 1 \tag{20}$$

e a

$$1/\gamma^2 = 1-\beta^2, \qquad n = 1 \tag{21}$$

De (18) resulta

$$\lim_{n\to 1} V = c = v \tag{22}$$

e assim caímos na invariância da velocidade da luz no vácuo.

Retomemos a expressão $1/\gamma^2$ que se pode escrever

$$1/\gamma^2 = (1 - v_r/V)(1 + v_r/v) \tag{23}$$

e imponhamos o Princípio da Invariância da Velocidade da Luz. Obtem-se, sucessivamente:

$$v = V = c, \quad \beta = v_r/c \quad \text{e} \quad 1/\gamma^2 = 1-\beta^2 \tag{24}$$

De (18a,b) resulta:

$$X = \gamma\, [x + v_r t] \tag{25a}$$

$$T = \gamma\, [t + \frac{v_r}{c^2} x] \tag{25b}$$

que é a forma clássica da Transformação de Lorentz.

Admitamos, agora, de acordo com a Mecânica de Newton, que a solução $v = V$ corresponda a dois infinitamente grandes equivalentes

$$\lim_{v\to\infty} \frac{V}{v} = 1 \tag{26}$$

única circunstância em que se observa a invariância $v \leftrightarrow V$.

Quando assim é, resulta de (17)

$$\gamma = 1 \tag{27}$$

e de (18a,b)

$$x = X - v_r T \tag{28a}$$

$$t = T \tag{28b}$$

que não é mais do que a Transformação de Galileu, pela qual se rege a Mecânica de Newton.

4. Conclusão

Conclui-se assim que não é indiferente a ordem pela qual se fazem intervir os dois princípios em que se alicerça a Teoria da Relatividade Restrita.

Na primeira atitude que se tomou, revela-se claramente que é a Invariância da Velocidade da Luz que obriga a abandonar o tempo absoluto que convive com a Transformação de Galileu. Surge como facto novo a dessincronização relativa e isso nos basta para determinadas aplicações, [3].

Só a plena intervenção do Princípio de Relatividade nos conduz a uma cinemática onde se observa a contracção do espaço e a dilatação do tempo.

Na segunda atitude, em que se vai tão longe quanto possível com o Princípio de Relatividade, a transformação a adoptar fica dependente dos resultados da experiência:

- Experiência de Fizeau.
- Experiências confirmando a invariância da velocidade da luz no vácuo e em referenciais de inércia.
- Qualquer outra experiência que meça com precisão o par V e v.

A transformação de velocidades subjacente à Transformação de Galileu

$$\lim_{v\to\infty} \frac{V}{v} = 1$$

não pertence, não se alicerçou na experiência.

Referências:

[1] **A. Einstein**, *The Meaning of Relativity*, Princeton, 1955

[2] **M. de Abreu Faro**, *Alguns aspectos essenciais associados à Transformação de Lorentz*, Memórias da Academia das Ciências de Lisboa, Classe de Ciências, Tomo XXXII, 1992/93

[3] **M. de Abreu Faro** e **M. Hermínia Marçal**, *Efeitos relativistas em Geodesia e Metrologia*, Memórias da Academia das Ciências de Lisboa, Classe de Ciências, Tomo XXXVI, 1996

[4] **F. Rohrlich**, *Classical Charged Particles*, Addison-Wesley, Reading, Massachussetts, 1965