Transformação de Coordenadas em Relatividade Restrita Métodos Geométricos

Na homenagem ao Professor Doutor Luis de Albuquerque por quem mantemos profunda consideração, admiração e estima

Manuel de Abreu Faro

1. Introdução

Por transformação de coordenadas entenda-se a Transformação Especial de Lorentz

$$[X,\ T] \rightleftarrows [x,t] \qquad Y = y \quad Z = z \tag{1}$$

respeitante a um referencial de inércia i que se desloca segundo o eixo dos XX com velocidade v relativamente ao referencial de inércia I.

Nas origens dos tempos os eixos homónimos dos sistemas de coordenadas espaciais (x,y,z) e (X,Y,Z) coincidem.

Cada referencial dispõe, assim, de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais que, na geometria de Minkowski, designaremos por (x,y,z,t) e (X,Y,Z,T), respectivamente.

Como $Y=y$ e $Z=z$, só temos que nos preocupar com as coordenadas (x,t) e (X,T). Neste trabalho apenas trataremos da transformação $[X,T] \rightleftarrows [x,t]$.

Seria fácil, na base de (1), estabelecer métodos envolvendo transformações $[X, Y, Z, T] \rightleftarrows [x, y, z, t]$, referências [1] e [2].

Começaremos por apresentar um método geométrico que nos permite obter a Transformação Especial de Lorentz.

A partir daí mostraremos que existem sistemas de coordenadas oblíquas, $(v,u)_i$ e $(v,u)_I$, que apostos, respectivamente, a (x,t) e (X,T) se constituem em cartas que permitem operar a transformação $[X,t] \rightleftarrows [x,t]$.

De facto, sempre que o par $[X,T]$ for o transformado de $[x,t]$, e reciprocamente, as coordenadas homónimas em $(v,u)_i$ e $(v,u)_I$ são iguais.

Sendo assim, o uso das cartas torna-se simples e evidente. Designámos estas cartas por cartas de transformação.

Mostrar-se-á que, à parte um factor constante, essas coordenadas $(v,u)_i$ e $(v,u)_I$ coincidem com as coordenadas (x_o, t_o) medidas num referencial intermédio i_o em relação ao qual I e i têm velocidades iguais e de sinais contrários.

Esta interpretação facultou-nos uma nova fundamentação do método em causa.

Essa fundamentação será apresentada e bem assim outra estabelecida anteriormente que, embora menos directa, foca alguns aspectos interessantes.

Finalmente, faz-se uma aplicação que ilustra claramente o uso das cartas de transformação. Todas as figuras e aplicações correspondem a $\beta = v/c = 0{,}6$.

2 - Sobre um Método Geométrico para obter a Transformação Especial de Lorentz

Existem diversos métodos para obter graficamente a Transformação Especial de Lorentz.

As primeiras representações gráficas devem-se a Minkowski (1908).

Mais recentemente, Synge (1955), Amar (1955), Loedel (1957) e Brehme (1962, 64) também apresentaram métodos geométricos visando a referida finalidade.

O método que estabelecemos (1976) é radicalmente diferente daqueles que foram concebidos pelos autores citados.

Por outro lado, tem a vantagem de utilizar na sua aplicação sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais com eixos sobrepostos, permitindo uma imediata e fácil comparação das coordenadas (x,t) e (X,T) de um dado acontecimento nos referenciais i e I.

x x x

A Transformação Especial de Lorentz, simbolicamente representada em (1), traduz-se por

$$X = \gamma(x+\beta t) \qquad\qquad x = \gamma(X-\beta T)$$
$$T = \gamma(t+\beta x) \qquad \text{ou} \qquad t = \gamma(T-\beta X) \qquad (2)$$
$$Y = y \quad Z = z \qquad\qquad y = Y \quad z = Z$$

Por simplificação, fez-se a velocidade da luz no vácuo igual a 1, $c = 1$, donde resulta $\beta = v/c = v$. Como é bem conhecido, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$

× × ×

Posto isto, passamos ao enunciado do método que é simples. Seguidamente procederemos à sua fundamentação.

Consideremos a Fig.1 onde se fizeram coincidir os eixos dos sistemas de coordenadas (x,t) e (X,T) associados, respectivamente, aos referenciais i e I. O referencial i move-se com velocidade v relativamente ao referencial I e segundo o eixo dos XX.

Na figura, p e P representam, respectivamente, nos sistemas de coordenadas (x,t) e (X,T) a referenciação de um mesmo acontecimento.

As coordenadas associadas a p e P estão ligadas pela Transformação Especial de Lorentz.

Assim, o problema consistirá em determinar P a partir de p, e reciprocamente.

Da figura ressalta claramente como o problema se resolve a partir dos ângulos de abertura φ e em que as bissectrizes são paralelas aos eixos coordenados.

Apenas resta acrescentar que o ângulo φ é definido por

$$\text{sen } \varphi = \beta \qquad (3)$$

e que de (3) resulta, para o que convier,

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\gamma-1}{\beta\,\gamma} \qquad (4)$$

Qualquer que seja o quadrante em que p ou P se situem, as rectas r e R têm sempre a mesma direcção, passando por um ponto comum e existente nos eixos sobrepostos dos tt e dos TT.

As rectas s e S, essas, passam por um ponto comum situado nos eixos sobrepostos dos xx e dos XX.

Assim, dado p, traçam-se r e s e, pelos pontos de intersecção com os eixos coordenados, traçam-se R e S que se intersectam, definindo P.

Para obter p, conhecido P, procedia-se de modo análogo.

x x x

Notemos que as rectas r, s, R e S fazem ângulos $\varphi/2$ com os eixos coordenados de onde resultam, atendendo a (4), os seguintes coeficientes angulares:

$$
\begin{aligned}
m(r) &= -\frac{\gamma-1}{\beta\gamma} \\
m(R) &= \frac{\gamma-1}{\beta\gamma} \\
m(s) &= -\frac{\beta\gamma}{\gamma-1} = -\frac{\gamma+1}{\beta\gamma} \\
m(S) &= \frac{\beta\gamma}{\gamma-1} = \frac{\gamma+1}{\beta\gamma}
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Assim, r e s têm coeficientes angulares negativos enquanto que R e S têm coeficientes angulares positivos.

Note-se, ainda, que r é perpendicular a S e s perpendicular a R.

Posto isto, passemos à fundamentação do método.

3 - Bases Fundamentais do Método

O método em questão foi estabelecido na base de determinadas intuições que depois se confirmaram.

Fundamentalmente, a ideia que presidiu foi a de encontrar lugares geométricos de acontecimentos [x.t] que se transformassem simetricamente em lugares geométricos de [X,T], em que [x,t] $\rightleftarrows$ [X,T] representa a Transformação Especial de Lorentz.

Como a transformação é linear, a uma recta corresponderá uma recta. Assim, naturalmente, os lugares geométricos explorados foram rectas.

Existirão nas condições enunciadas rectas com as propriedades das rectas r, s, R e S ? Conviria que tal sucedesse pois essas rectas exibem simetria em relação às direcções dos eixos coordenados.

× × ×

De (1) resulta

$$\begin{aligned} \Delta X &= \gamma(\Delta x + \beta\,\Delta t) \\ \Delta T &= \gamma(\Delta t + \beta\,\Delta x) \end{aligned} \tag{6}$$

Fazendo $\frac{\Delta T}{\Delta X} = M$ e $\frac{\Delta t}{\Delta x} = m$ teremos

$$M = \frac{m + \beta}{1 + m\beta} \tag{7}$$

Havendo simetria, se m representar o coeficiente angular da recta s, então, o coeficiente angular de S será $M = -m$. O mesmo deve suceder com r e R.

Resulta assim a equação

$$-m = \frac{m + \beta}{1 + m\,\beta} \tag{8a}$$

de raizes

$$\begin{aligned} M_1 &= -m_1 = \frac{\gamma - 1}{\beta\,\gamma} = \tan\frac{\varphi}{2} \\ M_2 &= -m_2 = \frac{\gamma + 1}{\beta\,\gamma} = \text{cotan}\,\frac{\varphi}{2} \end{aligned} \tag{8b}$$

Como ressalta da Fig.1, m_1 e M_1 correspondem às rectas r e R e m_2 e M_2 às rectas s e S.

Deste modo, as rectas r, R, s e S satisfazem à simetria imposta e são as únicas direcções que dão solução ao problema equacionado.

Dispondo de lugares geométricos o problema da determinação $p \rightleftarrows P$ está resolvido.

Mas nesta fase apenas dispomos da direcção dos lugares geométricos.

É notável que as rectas r e s, que passam por p, e as rectas R e S que definem P, se cruzem, respectivamente, em pontos comuns dos eixos coordenados.

Uma vez intuido foi fácil prová-lo.

Facilmente se demonstram a existência das seguintes transformações de lugares geométricos:

$$r[t = \tau - \frac{\gamma - 1}{\beta\gamma} x] \rightleftarrows R[T = \tau + \frac{\gamma - 1}{\beta\gamma} X] \tag{9a}$$

$$s[t = - \frac{\beta\gamma}{\gamma - 1} (x-\lambda)] \rightleftarrows S\ [T = \frac{\beta\gamma}{\gamma - 1} (X-\lambda)] \tag{9b}$$

Basta recorrer à Transformação Especial de Lorentz (2).

Para as rectas r e R existe uma ordenadã na origem que é comum e igual a τ.

Para as rectas s e S existe uma abcissa na origem que é comum e igual a λ.

Com isto o método está fundamentado.

4. Cartas de Transformação de Coordenadas em Relatividade Restrita. Fundamentação

Consideremos a Fig. 2 e dois pontos vizinhos p e q em (x,t).

Pelo método exposto obtemos P e Q em (X,T).

É fácil provar que tomando p e P como origens de sistemas de coordenadas cartesianas oblíquas, q e Q têm coordenadas homónimas iguais.

Note-se que os eixos dos sistemas de coordenadas associados a p e P fazem entre si, e respectivamente, ângulos:

$$\alpha(p) = \frac{\pi}{2} + \varphi \tag{10a}$$

$$\alpha(P) = \frac{\pi}{2} - \varphi \tag{10b}$$

São sistemas recíprocos.

Como já se salientara, r é prependicular a S e s perpendicular a R.

Como a posição de p é arbitrária podemos faze-lo coincidir com a origem das coordenadas (x,t). Então P coincidirá, também, com a origem de (X,T).

Assim surgem as cartas de transformação representadas na Fig. 3. e a que anteriormente nos referimos.

Dada uma sequência de pontos (1,2,3,4,5,6) em (x,t) imediatamente se obtem a sequência (1,2,3,4,5,6) em (X,T), basta ter em atenção que as coordenadas oblíquas homônimas são iguais.

Designaremos os respectivos sistemas de coordenadas por $(v,u)_i$ e $(v,u)_I$.

Não cabe aqui dissertar sobre esse assunto, no entanto, chamamos a atenção para o facto de as sequências, quando comparadas em (x,t) e (X,T), revelarem, com grande simplicidade e nitidez, propriedades bem conhecidas da cinemática relativista sobre a ordenação de acontecimentos no espaço e no tempo e invariância do gênero do intervalo espaço-tempo entre acontecimentos.

x x x

Ficou pois provado que existem sistemas recíprocos de coordenadas oblíquas (v,u) em que um qualquer acontecimento é representado em i e I por coordenadas homônimas iguais.

A este facto deve corresponder uma configuração física onde se observe simetria.

De facto essa configuração existe.

Designemos por 1 o referencial I, por 0 referencial intermédio i_o e por 2 o referencial i. O referencial i_o será escolhido de modo que

$$v_{1/0} = -v_{2/0} \quad \text{e} \quad v_{2/1} = \beta \tag{11}$$

Pela lei de adição das velocidades

$$v_{0/1} = \frac{v_{0/2} + v_{2/1}}{1 + v_{0/2}\, v_{2/1}} \tag{12}$$

Fazendo $v_{0/1} = W$ resulta a equação

$$W = \frac{-W + \beta}{1 - W\beta} \tag{13}$$

Impondo $W < 1$, aproveita-se a raiz

$$W = \frac{\gamma - 1}{\beta\gamma} = \tan\frac{\varphi}{2} = v_{0/1} \tag{14}$$

Basta atender a (3).

Designemos por (x_o, t_o) as coordenadas no referencial i_o e consideremos a transformação $[x,t] \rightarrow [x_o,t_o]$.

Atendendo a que $v_{0/1} = \tan \varphi/2$ facilmente se obtem:

$$x_o = \frac{1}{\sqrt{1 - \tan^2 \varphi/2}} (x + \tan \varphi/2 \; t)$$

$$t_o = \frac{1}{\sqrt{1 - \tan^2 \varphi/2}} (t + \tan \varphi/2 \; x) \qquad (15)$$

Da Fig. 3 resulta

$$v = \frac{1}{\cos \varphi} (x \cos \varphi/2 + t \,\mathrm{sen}\, \varphi/2)$$

$$u = \frac{1}{\cos \varphi} (x \,\mathrm{sen}\, \varphi/2 + t \cos \varphi/2) \qquad (16)$$

Por comparação imediatamente se conclui que

$$\frac{x_o}{v} = \frac{t_o}{u} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \qquad (17)$$

Assim, à parte um factor constante, as coordenadas (v,u) identificam-se com as coordenadas $(x_o.t_o)$ registadas no referencial i_o, relativamente ao qual i e I têm velocidades iguais e de sinal contrário.

Este o significado físico de v e u.

5 - Fundamentação Directa do Método Geométrico para Obtenção da Transformação Especial de Lorentz

A Transformação Especial de Lorentz

$$x = \gamma(X-vT)$$

$$t = \gamma(T - \frac{v}{c^2} X) \qquad (18)$$

pode escrever-se

$$X = vT + \sqrt{1 - \beta^2}\, x$$

$$T = \frac{v}{c^2} X + \sqrt{1 - \beta^2}\, t \qquad (19)$$

Na primeira relação, "vT" traduz em X um afastamento espacial com velocidade "v" da origem da coordenada "x".

Na segunda relação, $\frac{\text{"v X"}}{c^2}$ traduz em T um afastamento no tempo com uma dessincronização $\frac{\text{"v"}}{c^2}$ da origem da coordenada "t".

Esta interpretação foi apresentada no trabalho citado na referência [2

Fazendo c = 1 teremos

$$X = vT + \sqrt{1-\beta^2}\, x$$
$$T = vX + \sqrt{1-\beta^2}\, t \qquad (20)$$

Relativamente ao referencial intermédio $i_o(x_o, t_o)$ teremos, de acordo com os resultados obtidos na secção anterior, e para o referencial I(X,T) ,

$$X = \tan \varphi/2\ T + \sqrt{1-\tan^2 \varphi/2}\ x_o \qquad (21a)$$

$$T = \tan \varphi/2\ X + \sqrt{1-\tan^2 \varphi/2}\ t_o \qquad (21b)$$

Se agora tomarmos o referencial i(x.t)

$$x = -\tan \varphi/2\ t + \sqrt{1-\tan^2 \varphi/2}\ x_o \qquad (22a)$$

$$x = -\tan \varphi/2\ x + \sqrt{1-\tan^2 \varphi/2}\ t_o \qquad (22b)$$

De facto,

$v_{i_o/I} = \tan \varphi/2$ o que justifica (21,a,b)

$v_{i_o/i} = -\tan \varphi/2$ o que justifica (22,a,b)

Então, conjugando (21a) e (22a) obtem-se

$$X - T \tan \varphi/2 = x + t \tan \varphi/2 \qquad (23a)$$

$$T - X \tan \varphi/2 = t + x \tan \varphi/2 \qquad (23b)$$

Considere-se agora a Fig.1:

Projectando as rectas s e S nos eixos XX ≡ xx e atendendo a que as coordenadas de p são (x,t) e as coordenadas de P são (X,T), obtem-se (23a).

Projectando as rectas r e R nos eixos $TT \equiv tt$ obtem-se (23b).

Na Fig. 1 os vértices dos ângulos situam-se, respectivamente, nos eixos $XX \equiv xx$ e $TT \equiv tt$, na abcissa $\sqrt{1 - \tan^2 \varphi/2}\, x_o$ e ordenada $\sqrt{1 - \tan^2 \varphi/2}\, t_o$.

Assim se fundamenta o método:

É a resolução gráfica do sistema (23, a,b), dados (x,t), ou a resolução do mesmo sistema, dados (X,T).

Assim se apreende qual o significado dos pontos comuns às rectas (r e R) e (s e S).

À parte o factor $\sqrt{1 - \tan^2 \varphi/2}$, os referidos pontos comuns facultam-nos as coordenadas (x_o, t_o) medidas no referencial intermédio i_o.

Se marcarmos em (x,t) o ponto p, graficamente realizarmos as operações $(x+t \tan \varphi/2)$ e $(t+x \tan \varphi/2)$ e seguidamente resolvermos graficamente o sistema em X e T, surge a Fig. 1.

Com esta fundamentação completámos resultados que constam das referências [1] e [3].

6 - Uma Aplicação. Conclusões

Para melhor concluir procederemos a uma aplicação que ilustra bem as potencialidades das cartas de transformação.

Consideremos a Fig.4.

À esquerda representa-se a carta $(v,u)_i$ associada ao referencial i, à direita traçou-se a carta $(v,u)_I$ associada ao referencial I. As duas, em conjunto, constituem cartas que permitem efectuar a Transformação Especial de Lorentz.

Imaginemos em i uma barra em repouso.

Em diversos instantes repetiu-se a representação da barra. Obtem-se, assim, uma sequência de segmentos de recta, paralelos, $\overline{14}$ a $\overline{23}$.

Usando a propriedade das componentes homónimas serem iguais facilmente se obtem um traçado em $(v,u)_I$ dos segmentos representados em $(v,u)_i$.

São segmentos, também paralelos mas oblíquos em relação ao eixo dos XX.

Se quizermos medir o comprimento da barra no referencial I temos que fazer um registo instantâneo, por exemplo, aquele que corresponde ao instante definido pela recta R que é uma recta a tempo constante.

Obtemos uma sequência de pontos numa extensão que é $\sqrt{1-\beta^2}$ do comprimento da barra em repouso.

Em todo o trabalho as representações gráficas foram feitas para $\beta = 0{,}6$ pelo que $\sqrt{1-\beta^2} = 0{,}8$.

À recta R em I corresponde uma recta r em i que tambem determina uma sequência de pontos, todos eles correspondentes a diferentes instantes.

Conclusão: O que se regista em I e se oferece contraído é uma integração de pontos que se sucedem no tempo do referencial i. É a medida desse conjunto que se oferece contraída em R.

Não se trata pois da contracção instantânea de uma mesma realidade física. É uma apropriação em (X,T), instantânea, de acontecimentos que em (x,t) ocorrem todos em tempos diferentes.

x x x

Se concentrarmos, agora, a nossa atenção no extremo 1 da barra, verifica-se que durante a ocorrência das diversas representações decorreu um tempo próprio $(t_2 - t_1)$, o extremo da barra foi inicialmente o acontecimento 1 e finalmente o acontecimento 2.

Em I facilmente se obtem a representação de 1 e 2 e verifica-se que o tempo se dilata: $(T_2 - T_1) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \; (t_2 - t_1)$.

Note-se que os acontecimentos 1 e 2 ocorrem em (X,T) em locais diferentes, $X_2 \neq X_1$, o que significa que $(T_2 - T_1)$ já não é um tempo próprio.

x x x

Assim, e através de uma figura simples, se evidenciaram dois efeitos cinemáticos característicos da Relatividade Restrita: a contracção do espaço e a dilatação do tempo.

Muitos outros problemas se podem resolver com grande facilidade e clareza.

x x x

Conclusão: Embora a Transformação Especial de Lorentz seja formalmente simples.

Embora seja fácil programar um computador para que rapidamente nos faculte a transformação das coordenadas de qualquer conjunto de acontecimentos, o que é facto é que uma representação geométrica permite uma visão global que, se oferece, em geral, com maiores potencialidades que uma colecção de números e é ainda, muitas vezes, fonte de insuspeitadas significações.

Além da simplicidade que lhe é inerente, uma das vantagens das cartas de transformação que apresentámos é permitir representações em coordenadas cartesianas ortogonais nos dois referenciais em causa. Isso permite uma fácil comparação de situações.

Oferece-se interessante, que as coordenadas oblíquas de transferência, v e u, sejam, à parte um factor constante, as coordenadas x_o e t_o que se registam no sistema intermédio i_o, relativamente ao qual os dois referenciais i e I têm velocidades iguais e de sinal contrário, $(\tan \varphi/2)$ e $(-\tan\varphi/2)$, que são exactamente ou pelo seu inverso os coeficientes angulares das rectas R, r, S e s que intervêm no método geométrico e são em última análise as direcções em (x,t) e (X,T) dos eixos das coordenadas v e u.

Foi esta interpretação que nos conduziu à demonstração apresentada na Secção 5.

Inicialmente recorreu-se à fundamentação que consta da Secção 3.

São atitudes diferentes.

A demonstração que se apresentou neste trabalho tem a virtude de resultar directamente de uma adequada escrita da Transformação Especial de Lorentz na qual se recorre aos conceitos de velocidade relativa e dessincronização relativa das origens das coordenadas.

Por último, salienta-se que qualquer quadrivector pode beneficiar dos métodos apresentados que, assim, têm larga aplicação.

REFERÊNCIAS

1 - Abreu Faro, M.J.: Método geométrico de obtenção das Transformações de Lorentz. Propriedades do método e suas aplicações. MEMÓRIAS DA ACADEMIA DAS CIÊNCIAS DE LISBOA - CLASSE DE CIÊNCIAS - TOMO XX - 1977.

2 - Abreu Faro, M.: Estabelecimento e Interpretação Física da Transformação de Lorentz, TÉCNICA, nº 438, 1977.

3 - Abreu Faro, M.: Cartas de Transformação em Relatividade Restrita, TÉCNICA, nº439, 1977.

4 - Amar, H.: New Geometric Representation of the Lorentz Transformation. Am. J. Phys. 23: 487, (1955).

5 - Brehme, R.W.: A Geometric Representation of Galilei and Lorentz Transformations. Am. J. Phys. 30: 489, (1962).

6 - Brehme, R.W.: Geometric Representations of the Lorentz Transformation — Am. J. Phys. 32: 233, (1964).

7 - Loedel, E: Aberration y Relatividad. Anales de la Sociedade Argentina. 145: 3, (1948).

8 - Loedel, E.: Geometric Representation of the Lorentz Transformation. Am. J. Phys. 25: 327, (1957).

9 - Synge, J.L.: Relativity: The Special Theory North Holland Publishing Company, Amsterdam, (1965).